

Определим функции $e_k(t) = e_k \cos 2\pi t - g_k \sin 2\pi t$, $g_k(t) = g_k \cos 2\pi t + e_k \sin 2\pi t$, и функционалы $\alpha_k[x(t)] = (x_c, g_k^*) + (x_s, e_k^*)$, $\beta[x(t)] = (x_c, e_k^*) - (x_s, g_k^*)$, где векторы x_c и x_s — это отвечающие $\cos 2\pi t$ и $\sin 2\pi t$ коэффициенты Фурье функции $x(t) \in F[0, 1]$.

Наконец, определим действующий из Φ в F оператор $\Theta x(t) = x(t) - tx(1)$.

Из условия U1) следует, что матрица A_0 обратима. Основными в предлагаемой схеме являются следующие функции:

$$\begin{aligned}\psi_{2k}(t) &= \int_0^t a_2(e_k(s), \lambda_0) ds, \quad \psi_{3k}(t) = \int_0^t a_3(e_k(s), \lambda_0) ds, \\ \Gamma_k(t) &= \frac{1}{T_k} A_0^{-1} \psi_{2k}(1) - \Theta \psi_{2k}(t) - T_k A_0 \int_0^t \exp[T_k A_0(t-s)] \Theta \psi_{2k}(s) ds, \\ \psi_{1k}(t) &= T_k \int_0^t a'_{2x}(e_k(s), \lambda_0) \Gamma_k(s) ds - \psi_{3k}(t), \quad k = 1, 2.\end{aligned}$$

Положим $A' = A'(\lambda_0)$ и определим числа: $\gamma_k = (A' e_k, e_k^*) + (A' g_k, g_k^*)$, $\delta_k = \alpha_k[\Theta \psi_{1k}(t)]$.

Т е о р е м а 2 (о типе бифуркации). Пусть выполнены условия U1)–U3) и $\delta_k \neq 0$, $k = 1, 2$. Тогда рождающиеся при малых $|\lambda - \lambda_0|$ периодические решения $x(t, \lambda)$ системы (1) с периодом, близким к $\frac{2\pi}{\omega_k}$, существуют только при $\lambda < \lambda_0$, если $\delta_k \gamma_k < 0$, или только при $\lambda > \lambda_0$, если $\delta_k \gamma_k > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мардсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 362 с.
2. Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г. Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 24-30.

Sharafutdinov I.V. TAG AND TYPE OF HOPF BIFURCATIONS IN NON-SMOOTH DYNAMICAL SYSTEM FOR DEGENERACY

Sign of the Hopf bifurcation for a dynamic system with non-smooth right-hand side, which has a certain value of the parameter two pairs of purely imaginary eigenvalues, is received. Also a method for determining the type of bifurcation is provided.

Key words: Hopf bifurcation; non-smooth dynamical system; fold degeneracy.

УДК 517.91

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ФОРМАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ, ИМЕЮЩЕГО НАЧАЛЬНЫЙ ПРОГИБ

© Г.Г. Шарафутдинова

Ключевые слова: прогиб стержня; начальный прогиб; устойчивость.

Предлагается новый приближенный метод нахождения критической силы и формы прогиба стержня, сжатого осевой силой и имеющего начальный прогиб.

Математическая модель изгиба стержня, лежащего на упругом основании и имеющая первоначальный прогиб u_0 , описывается краевой задачей

$$y'' = \rho(s)(-\lambda y + f(y) - \lambda u_0 + f(u_0))\sqrt{(1 - (y' - u'_0)^2)} - u''_0, \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где s — координата, совпадающая с искривленной осью стержня; y — прогиб стержня, $\rho(s)$ характеризует изменение жесткости по длине стержня; $f(s)$ — функция, характеризующая наличие упругого основания; λ — продольная нагрузка.

При постепенном увеличении продольной нагрузкой λ своего значения в задаче (1)–(2) стержень прогнется дальше в сторону первоначальной деформации и при дальнейшем увеличении нагрузки, при достижении ею значения, называемого критическим, произойдет «хлопок» и стержень резко (скачком) прогнется в противоположную сторону — произойдет жесткая бифуркация.

В работе предлагается схема нахождения критических нагрузок и получения аналитических формул, дающих приближенные решения задачи (1)–(2).

На первом этапе переходим к операторному уравнению. Для функции $y(s) \in W_2^2[0, 1]$, удовлетворяющей граничным условиям задачи (1)–(2), положим

$$z(s) = -\frac{d^2 y}{ds^2} \quad (3).$$

Тогда $z(s) \in L_2[0, 1]$, при этом выполнено равенство

$$y = \int_0^1 G(s, \sigma) z(\sigma) d\sigma, \text{ где } G(s, \sigma) = \begin{cases} \sigma(1-s); 0 \leq \sigma \leq s, \\ s(1-\sigma); s \leq \sigma \leq 1, \end{cases} \quad (4)$$

— функция Грина оператора $-y''$ при граничных условиях $y(0) = y(1) = 0$. Граничная задача (1)–(2) эквивалентна операторному уравнению

$$z(s) = A(\lambda)z(s) + a(z(s), \lambda) + \varphi(z(s), \lambda), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A(\lambda)z(s) &= (\lambda - c)\rho(s)\left(1 - \frac{1}{2}u_0'^2\right) \int_0^1 G(s, \sigma)z(\sigma)d\sigma + \rho(s)\left((c - \lambda)u_0 + q\right)u_0' \int_0^1 G'_s(s, \sigma)z(\sigma)d\sigma, \\ a(z(s), \lambda) &= (c - \lambda)\rho(s) \int_0^1 G(s, \sigma)z(\sigma)d\sigma \cdot \left(\frac{1}{2}\left(\int_0^1 G'_s(s, \sigma)z(\sigma)d\sigma\right)^2 + u_0' \int_0^1 G'_s(s, \sigma)z(\sigma)d\sigma\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho(s)\left((c - \lambda)u_0 + q\right)\left(\int_0^1 G'_s(s, \sigma)z(\sigma)d\sigma\right)^2. \end{aligned}$$

Функция $\|\varphi(z(s), \lambda)\|_{L_2} = o(\|z(s)\|_{L_2}^3)$ при $\|z(s)\|_{L_2} \rightarrow 0$, $\|a(z(s), \lambda)\|_{L_2} = o(\|z(s)\|_{L_2})$ при $\|z(s)\|_{L_2} \rightarrow 0$, q — поперечная нагрузка.

Из общей теории бифуркации известно, что критическими являются такие значения параметра λ , при которых оператор линеаризованной задачи имеет собственное значение, по модулю равное единице. Рассмотрим оператор

$$F(z) = A(\lambda)z(s) + a(z(s), \lambda) + \varphi(z(s), \lambda).$$

Найдем матрицу Якоби $F'(z^*(s, \lambda))$, вычисленную в точке $z = z^*(s, \lambda)$. Положим $Bh = F'(z^*(s, \lambda))$ и найдем спектральный радиус оператора B .

Т е о р е м а 1. *Оператор $B: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ положителен.*

Спектральный радиус оператора B есть наибольшее по модулю собственное значение. Для произвольной функции $h_0(s) \neq 0: \|h_0(s)\|_{L_2} = 1$ вычислим $h_1(s) = \frac{B(\lambda)h_0(s)}{\|B(\lambda)h_0(s)\|}$, $h_2(s) = \frac{B(\lambda)h_1(s)}{\|B(\lambda)h_1(s)\|}, \dots, h_n(s) = \frac{B(\lambda)h_{n-1}(s)}{\|B(\lambda)h_{n-1}(s)\|}$, где $h_n(s) \rightarrow h^*(s)$ — собственная функция оператора B , отвечающая наибольшему по модулю собственному значению, т. е. $B(\lambda)h^*(s) = \mu_{max}h^*(s)$. Собственное значение μ_{max} можно вычислить по формуле

$$\mu_{max} = \frac{(B(\lambda)h^*(s), h^*(s))}{(h^*(s), h^*(s))}.$$

Далее программа в среде MATLAB находит значение $\lambda = \lambda^*$, при котором спектральный радиус $\rho(B) = \mu$ становится равным единице.

Для определения приближенных прогибов после бифуркации находим решение классической задачи [1], т. е. определяем критические значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, такие, что $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$. Затем определяем, между какими двумя последовательными собственными значениями находится λ^* . Номер собственного значения λ_i на левом конце равен количеству полуволн, по которым прогнется стержень. Форма прогиба стержня при $\lambda = \lambda^*$ будет такой же, как в условиях классической задачи при $\lambda = \lambda_i$, когда значение q мало.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарафутдинова Г.Г. Операторный метод исследования задачи Эйлера о формах потери устойчивости шарнирно-закрепленного стержня при продольной нагрузке // Известия вузов. Математика. Казань, 2010. № 11. С. 86-91.

Sharafutdinova G.G APPROXIMATE METHOD OF SOLVING ABOUT BUCKLING RODS HAVING THE INITIAL DEFLECTION

We propose a new method for finding approximate the critical force and deflection of the rod shaped, compressed by an axial force and having an initial deflection.

Key words: deflection of the rod; the initial deflection; stability.

УДК 512.18

ОКРЕСТНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ ИММУННЫХ СИСТЕМ

© А.М. Шмырин, А.С. Косарева

Ключевые слова: окрестностные системы; искусственные иммунные системы.

Предложена окрестностная иммунная система.

Искусственная иммунная система – комплекс математических методов, моделирующих основные функции иммунитета человека. ИИС используют для решения задач распознавания образов, классификации, оптимизации.